Revisión crítica de la contextualización Matemática que involucra conceptos físicos

Analía Zabala [1]

Resumen

En el taller se realizará un análisis crítico de algunas situaciones problemáticas que se presentan en los libros de texto para contextualizar conceptos matemáticos.

La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno; sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente a fin de que el alumno pueda extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.

Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo, es necesario una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real. Caso contrario, se fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busque la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.

Pertinencia del tema abordado

En el marco del proyecto: “Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia”, actualmente en ejecución en la Facultad de Ingeniería de la

[1] Universidad Nacional de San Juan-Argentina

Universidad Nacional de San Juan - Argentina; uno de cuyos objetivos específicos es reconocer áreas claves del conocimiento en matemática con dificultades de aprendizaje en la enseñanza media[2]; se realizó, en una primera etapa, el análisis de los "errores" más frecuentes cometidos por los estudiantes en la resolución de ejercicios y situaciones problemáticas en las evaluaciones de Ingreso a la facultad. Los resultados obtenidos muestran que los temas en los que el porcentaje de recurrencia de errores es mayor son los relacionados a la interpretación de gráficos y análisis de los resultados numéricos obtenidos al resolver una situación problemática. En algunas entrevistas personales argumentaron que "nunca pensaban si el resultado es coherente o no porque era una evaluación de matemática…"

La situación no refleja una dificultad "local" en la situación de enseñanza aprendizaje de la matemática; que se da no sólo en la escuela media, sino también en el ciclo básico universitario.
A nivel mundial, es conocido el hecho del alto índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas en áreas de ingeniería, la reprobación es sólo un síntoma de toda la problemática. En este conflicto inciden muchos factores de tipo social, económico, de orden curricular, asociados a la didáctica, que inciden en el aprendizaje y en la enseñanza de la matemática, inherentes a la formación de los docentes, inferidos al propio tema de estudio, por causas de la infraestructura cognoscitiva de los alumnos, etc. Los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia. Desde esta perspectiva, la desarticulación que existe entre los cursos de matemáticas y las demás asignaturas que cursa el estudiante se convierte en un conflicto cotidiano para los alumnos. (Camarena, 2008)

---

[2] En San Juan- Argentina el Nivel Medio se refiere a la secundaria, que comprende el Ciclo Básico de tres años y el Ciclo Orientado (4°, 5° y 6° año), las orientaciones ofrecidas dependen de la institución escolar, las más frecuentes entre las que puede optar el estudiante son: Naturales, Sociales y Economía. Las edades de los estudiantes en el Ciclo Básico fluctúan entre 12 y 15 años y en el Ciclo Orientado entre 15 y 18años.Universidad Nacional de San Juan-Argentina

Ahora bien, si la contextualización de conceptos matemáticos no se realiza con una transposición didáctica adecuada, el alumno no puede realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; lo que fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busquen la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.

El aprendizaje no es una simple reproducción de contenidos sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que cobran especial importancia los aportes de los alumnos, en este marco el papel del profesor es más complejo.

El profesor pasa de ser un mero transmisor de conocimientos a ser un orientador o guía que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados.
Es por todo ello que en la actualidad hay un cierto consenso en que las competencias profesionales que los profesores de matemática tendrían que intentar desarrollar son las siguientes (Font, 2005):

a) Competencia en el domino de los contenidos matemáticos. Para ello, las matemáticas que debe saber el profesor no se pueden limitar a contenidos formales y descontextualizados organizados de manera deductiva. El profesor necesita saber también cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas. El diseño de las unidades didácticas se ha de basar, como mínimo, en los seis aspectos que se describen a continuación.
- La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo y del proyecto de centro correspondiente.
- Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.
- El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de

problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).

- Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.
- El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado
- Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.

Con relación a las actividades diseñadas hay que tener presente que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende. Hay que procurar incorporar actividades que permitan superar el aprendizaje pasivo, como el uso de materiales y recursos informáticos, problemas contextualizados, uso de diferentes representaciones.

c) La capacidad de gestión de las secuencias didácticas en el aula. La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica". Las actividades didácticas se deben adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos. El profesor ha de ser competente en el análisis de las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico. Por otra parte, hay que ser conscientes de que el profesor se va a encontrar con determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular individual.

Para ser competente en la planificación, diseño y gestión de secuencias didácticas tal como se ha formulado en los párrafos anteriores es necesario que el profesor sea competente en:

d) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos de los alumnos.

Estas cuatro competencias profesionales de los profesores de matemáticas tienen implicaciones importantes para su formación. Una formación matemática adecuada debe tener en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real y a otras ciencias.

Este taller, en el que se realizará una revisión crítica de algunos de los conceptos básicos de Física usados frecuentemente en la bibliografía para contextualizar algunos temas matemáticos, surge ante las dificultades manifestadas por los docentes de matemática del nivel secundario y de los primeros cursos universitarios:

- Al orientar al alumno para que pueda realizar una validación del modelo o el análisis de de los resultados obtenidos si los mismas involucraban conceptos físicos.
- Para reconocer si la situación problemática propuesta corresponde a una "transposición didáctica" que muestra un significado sesgado o incorrecto.
- Conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos que involucran modelos estudiados en Física.
- Seleccionar los problemas contextualizados adecuados para promover un aprendizaje significativo.

Marco teórico

Resulta importante que los estudiantes de los cursos de Matemática sepan y conozcan que la matemática es y ha sido un valioso instrumento a través del cual muchas disciplinas, técnicas y ciencias se van estructurando y o perfeccionando, y que muchas de sus funciones no serían factibles sin la utilización de ideas, conceptos, ejercicios y aplicaciones de matemática. Investigaciones que se han preocupado por la introducción de los problemas contextualizados en el currículum. (“Realistic Mathematics Education” del instituto Freudenthal)

La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno; sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente a fin de que el alumno pueda extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.

En caso contrario, “La matemática que se enseña es ese cúmulo procedimental algorítmico, lógico formal, cargado de ejercicios irrelevantes…. “…hay que propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas otorgando un sentido al conocimiento matemático- en donde se establezca un lazo con los usos de la Matemática….” “La modelización matemática estrategia didáctica y pedagógica- asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales permitiendo, a su vez, la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes” (De Katz, Mancipar , 2009)

Tanto en la enseñanza como en la investigación o las aplicaciones, las matemáticas conviven e interactúan con otros saberes, lo que ha dado lugar a fenómenos de adaptación. Entre estas adaptaciones, en ocasiones, surgen "deformaciones" o empleos incorrectos. Otro aspecto conflictivo se refiere a la dificultad de comunicación entre el matemático y el especialista en otras ciencias, de cara a la realización de trabajos en cooperación, debido al empleo de lenguajes científicos diferentes en cada especialidad. Los usuarios de las matemáticas son los que plantean los problemas, pero es el matemático quien tiene las herramientas para su solución. En los procesos de planteamiento del problema al matemático por parte del usuario y de comunicación de las soluciones alcanzadas por el matemático, aparece un doble proceso de transposición didáctica de una a otra materia, en el cual pueden producirse desajustes que perturben la adecuada utilización de las herramientas matemáticas. (Godino, 2003).

Para el desarrollo de una "convivencia simbiótica" de las matemáticas con otros saberes se precisa del desarrollo de un lenguaje común que haga posible el mutuo entendimiento y la comunicación.

Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo, es necesario una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan. El docente de matemática debe procurar reducir en sus clases el desarrollo de ejercicios de memoria en forma mecánica sin la debida comprensión.

Por ello, "…el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto….Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado…" (Godino, 2003).

Si realmente quiere contribuir a un aprendizaje significativo de sus alumnos, el docente de matemática debe realizar un uso adecuado de los Fundamentos de Física involucrados en la contextualización de conceptos matemáticos.

De acuerdo con Brousseau (1986), el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles. Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo de matemático profesional: debe producir una re contextualización y una re personalización de los conocimientos, ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones, las cuales serán sus propios conocimientos.

El profesor debe ofrecer a los alumnos los medios de encontrar lo que es el "saber cultural" que se le quiere enseñar. Los alumnos deben, a su vez, redescontextualizar y redespersonalizar su saber de modo que identifiquen su producción con el saber que se usa en la comunidad científica y cultural de su época.

Una interpretación ingenua del constructivismo conduce a atribuir un papel limitado a la enseñanza, esto es, al trabajo del profesor en su labor de facilitar el aprendizaje; esta quedaría reducida a la selección de situaciones problemáticas significativas para los alumnos. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. (Carmen Batanero, Juan D. Godino y Virginia Navarro-Pelayo).

La atención a los tres aspectos del conocimiento matemático (quehacer, lenguaje, sistema conceptual) en los procesos de enseñanza-aprendizaje hace más compleja la labor de los profesores en las aulas, por lo que se precisa el desarrollo de materiales curriculares que, sin sofocar su necesaria creatividad, hagan viable la renovación de la educación matemática. La selección de situaciones problemáticas prototípicas precisa de un conocimiento profundo del campo de problemas y del contenido correspondiente, que normalmente no está al alcance de los profesores. Frecuentemente, el discurso psico-pedagógico ignora las complejidades del contenido de enseñanza, reclamando del profesor tareas que no están a su alcance, exigiéndole que aplique a su práctica cotidiana análisis que requieren un tiempo y unos conocimientos teóricos que no están a disposiciones de los profesores. La investigación didáctica debe aportar soluciones prácticas a estos problemas. La elaboración de textos para la formación inicial y permanente de profesores puede ser una contribución significativa para este fin. *(*Juan D. Godino y Carmen Batanero)

Metodología

a) Exposición, a modo de introducción, de los principales resultados obtenidos en el marco del proyecto: "Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia", actualmente en ejecución en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan – Argentina. Se realizará el análisis de problemas didáctico-matemático específicos detectados.

b) Presentación de una síntesis de algunas de las conclusiones, expuestas durante los últimos años por investigadores en educación matemática referidas a la tendencia actual de presentación de matemáticas contextualizadas, como herramienta para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

c) A modo de ejemplo y con el propósito de motivar el trabajo colaborativo del taller, se mostrarán algunos problemas contextualizados y las variables didácticas específicas relacionadas con la situación (en especial los elementos de la situación que puedan afectar el proceso de enseñanza-aprendizaje).

d) Taller de análisis crítico de problemas contextualizados, usando la metodología de trabajo colaborativo en grupos pequeños. Se fomentará el trabajo participativo de los asistentes, con la orientación permanente del docente a cargo, en las actividades propuestas.

Algunas de las tareas a proponer en el taller son:

Dados una colección de problemas contextualizados que involucran Fundamentos de Física, seleccionados de la bibliografía disponible para docentes y alumnos del nivel secundario y primeros cursos de matemática universitaria, identificar:

- posibles estrategias de resolución por parte de los alumnos;
- conocimientos matemáticos movilizados en los distintos procedimientos de resolución;
- contenidos científicos (de Física) involucrados;
- objetivos plausibles que pueden cubrirse;
- elementos de la situación que deben ser modificados por el docente para que no afecten negativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje,
- complejidad,
- validez científica de los resultados obtenidos.

Para culminar cada jornada de trabajo se realizará la exposición y argumentación de las conclusiones a las que arribaron los distintos grupos.

Destinatarios

Docentes de secundaria y primeros cursos de matemática en la universidad.

Contenidos

- *Didáctica de la Matemática:* Contextualización. Modelización.
- *Contenidos matemáticos involucrados:* Ecuaciones**.** Sistema de ecuaciones**.** Funciones: Función lineal. Función cuadrática. Derivada de una función
- *Contenidos físicos involucrados:* Sistema Internacional de Unidades. Cinemática de la partícula**.** Dinámica de la

partícula. Momento de una fuerza. Trabajo de una fuerza. Potencia.

Didáctica de la matemática

Actualmente hay una tendencia a considerar que "saber matemáticas" incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia tiene que ver con la importancia que se da, en los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real (p.e. el estudio Pisa 2003). En dicho informe se consideran las siguientes competencias: (Font, 2008).

- Pensar y razonar. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas ("¿Cuántas … hay?", "¿Cómo encontrar …?"); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- Argumentar. Se refiere a; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
- Comunicar. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- Modelar. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.

- Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
- Representar. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; elegir entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particular.
- Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- Utilizar ayudas y herramientas. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Contextualización

En este taller nos referimos a contextualización como el proceso a través del cual se proporciona un ejemplo particular de un objeto matemático, proceso que va del objeto matemático a la realidad.

En la actualidad se observa una tendencia a la sustitución de las matemáticas formalistas por unas matemáticas más empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.). Estas matemáticas empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. (Vicenç Font, 2008).

La investigación en Didáctica de las Matemáticas ha resaltado la importancia que se debe dar a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real. Algunas de estas investigaciones muestran, con ejemplos concretos, que hay una brecha importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas hacen servir en su vida cotidiana. Para Díez (2004) la existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2001). Algunos de estos estudios han puesto de manifiesto que las personas que fracasan en situaciones matemáticas escolares, pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo contenido matemático (Lave, 1988 y Scribner, 1984). En situaciones de la vida real en las que las personas se sienten implicadas se ha observado que éstas utilizan matemáticas "propias" que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitiva, emocional y socialmente. Estos fenómenos ponen de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. (Vicenç Font, 2008).
La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que contribuye a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno, sólo si están diseñados de manera que permitan al estudiante:

- Hacer uso de su experiencia real.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
- El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.

- La formulación de conjeturas y la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos, descartando el énfasis de la búsqueda mecánica de respuestas.
- La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.
- Comprensión de lo que ellos conocen y necesitan aprender.

Las configuraciones empiristas sugieren una sugestiva agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas: (Font, 2007)

1. ¿Cómo se puede conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos extra-matemáticos?
2. ¿Qué características han de cumplir los problemas contextualizados?
3. ¿Cómo se pueden clasificar?
4. ¿Es posible en las instituciones de secundaria implementar configuraciones epistémicas contextualizadas que permitan una actividad de modelización "rica"?
5. ¿Qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar este tipo de configuraciones epistémicas?
6. ¿Cómo se relacionan este tipo de configuraciones epistémicas con las formales y qué dificultades tienen los alumnos en la transición entre estos dos tipos de configuraciones epistémicas?

Modelización

Es el proceso en el que se interpreta de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. (Font, V.) La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto. (Camarena, 2008)

Las fases de este proceso cognitivo son: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo matemático. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad

En ocasiones se espera que la respuesta a un problema matemático sea inmediata, que se responda sobre la marcha, sin una reflexión creativa (Barnett, 1988). En la práctica escolar, cada problema tiene una solución, con frecuencia única, y, en todo caso, el profesor conoce esta solución. La sociedad no valora al profesional matemático porque se entiende que la enseñanza de las matemáticas, desde la escuela a la universidad, debería capacitar a los ciudadanos y distintos profesionales a resolver sus problemas matemáticos. Esto es irreal e impide un "cultivo" idóneo de las matemáticas. Usualmente hay diversas técnicas matemáticas adaptadas para un problema dado. Además, cada una de ellas está basada en una serie de hipótesis de carácter teórico sobre los datos que en la realidad nunca se cumplen de forma exacta. El profesional matemático debe valorar, entre los diversos métodos disponibles, el grado de ajuste entre las hipótesis y los datos disponibles. La modelización matemática es con frecuencia altamente compleja y precisa de una destreza técnica sofisticada, así como un cierto nivel de creatividad. Esto sólo se puede conseguir en sujetos con un cierto nivel de especialización y dedicación profesional. (Godino, 2003)

Al hacer uso de Modelos físicos para contextualizar objetos matemáticos se debe tener en cuenta:

- El uso adecuado de los conceptos y nomenclatura de las magnitudes físicas involucradas.
- La adecuada inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo
- Debe ser factible realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan.

Clasificación de problemas según el contexto

- *Contexto intra-matemático (Problemas Descontextualizados):* Formulación abstracta. Lo que se pide averiguar no permite activar ningún proceso mental.

Ejemplos

- Interpretar las siguientes situaciones y escribir la función cuadrática f(x) que representa a cada caso.

a) El espacio recorrido por un auto con movimiento acelerado (y aceleración de 6 kilómetros sobre hora cuadrada) que comienza a moverse con velocidad inicial de 20 kilómetros por hora es igual a su velocidad inicial por el tiempo transcurrido, más el triple del cuadrado del tiempo transcurrido. Escribir la función f(x) que representa el espacio recorrido en función del tiempo transcurrido.

b) Las ecuaciones horarias de dos móviles son: $x1(t) = t^2 + 3t + 5$ y $x2(t) = 3\ t^2 - t+7$
Hallar el instante en el cual ambos móviles están en la misma posición y especificar la posición de ambos móviles en dicho instante.

- *Contexto real:* refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.
  - *Contexto simulado:* tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características.
  - *Contexto evocado:* refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

Clasificación de los problemas de contexto evocado (Font, 2007)

- Según su complejidad:
  - Problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos complejos de modelización (un extremo).
  - Problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados. (otro extremo).
  - Entre estos dos extremos hay una línea continua en la que podemos situar a la mayoría de los problemas contextualizados propuestos en los libros de textos.

- En función del momento
  - A continuación de un proceso de instrucción: El objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. Les llamaremos: Problemas contextualizados evocados de aplicación si son relativamente sencillos y problemas contextualizados evocados de consolidación cuando su resolución resulte más compleja.
    Se trata fundamentalmente de aplicar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción
  - Al inicio de un tema o unidad didáctica con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos. Les llamaremos problemas de contexto evocado introductorios puesto que se proponen al inicio de un tema matemático y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky).

De acuerdo a la situación evocada:

- *Contextualizados artificialmente:* imposibles como tales o por los datos; posibles pero insensatos (sea por la acción o por lo que se pide).

Ejemplos

- En un partido de vóley un jugador salta al lado de la red y le pega a la pelota. Ésta recorre una trayectoria **recta** de 6m de longitud. La trayectoria de la pelota y el piso forman un ángulo de 25°. Si el jugador mide 2,10 m de altura con el brazo extendido, ¿cuánto saltó? (Pág. 153 Haciendo Números 9 Marina Andrés y Pablo Kaczor 1° ed. Ed. Santillana. Buenos Aires, Argentina, 2004)

- Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la torre CN en Toronto, 450m por arriba del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota una vez que transcurren 5 segundos. (Ejemplo 3 – Capítulo 2: Límites y derivadas. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos – 3ª ed.- Ed. Thomson – México – 2006)

- *Realmente Contextualizados* (posibles y sensatos): El escenario tiene que ver con situaciones reales; la acción y los datos, son razonables para la situación.

Ejemplo
- En un partido de fútbol, Gaspar pateó un tiro al arco. La pelota describió una parábola de tiro de 2 m de altura máxima y su primer pique fue a 10 m de donde él estaba. Luego de picar volvió a describir otra parábola de tiro, pero su alcance fue del 40% de la primera parábola, y su altura máxima fue la mitad. En el preciso momento del segundo pique, la pelota fue detenida en el suelo por el arquero Baltasar. Consideren la pelota como un punto, tracen un sistema de ejes x e y con origen en el lugar desde donde fue pateada y grafiquen toda su trayectoria. Hallen las expresiones de y = f(x) para cada una de las parábolas de tiro e indiquen el dominio de cada función. Calculen la altura de la pelota cuando se encontraba a 11 m (horizontales) desde donde fue pateada.
¿Para qué valores de x tuvo la pelota una altura de 1,92m?

Rigor de conceptos físicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Siendo la resolución de problemas un aspecto esencial de la matemática, la intuición y el rigor deben estar presentes al resolver problemas. Es tarea de los docentes estimular la interacción entre intuición y rigor, de modo que haya una retroalimentación positiva. Una primera aproximación intuitiva puede ser potenciada con un adecuado nivel de formalización y la búsqueda del rigor en las afirmaciones; y éstas, a su vez, pueden inducir a intuir la solución de otras partes del problema, de otras formas de resolverlo, o llevar al convencimiento de que la conjetura inicial, basada en una mirada intuitiva, no es la correcta. (Uldarico Malaspina, 2008)

Ejemplos de algunas "aclaraciones" extraídas de textos de matemática que inducen a interpretar erróneamente los conceptos *físicos involucrados, reafirmando, en algunos casos, los preconceptos de los estudiantes*

- "Algo más….: En general se logra que la velocidad sea constante luego de un periodo de aceleración. Solamente podemos hablar de velocidad constante todo el tiempo cuando modelizamos situaciones ideales en un laboratorio. Sin embargo, los aviones tienen un sistema que les permite, a partir de un cierto momento, ir a determinada velocidad constante fija, este sistema se utiliza cuando se manejan con piloto automático". (Altman, Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S. A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).

- ¿Sabían que…?: Galileo tiró desde la torre de Pisa dos cuerpos de distinto peso y observó que caían al piso simultáneamente y que aumentaban su velocidad a medida que iban cayendo. No pudo medir este cambio en la velocidad de caída debido a la poca precisión de los instrumentos que poseía – no existía el cronómetro -, pero dedujo que lo mismo debía pasar en un plano inclinado, donde pudo trabajar con unidades de tiempo que podía medir. Demostró, así, que la velocidad aumentaba en razón al cuadrado del tiempo: $v = k: t^2$. (Altman, Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S.A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).

- La Dinámica, parte de la Física que estudia el movimiento y sus causas, se basa en una ley asombrosamente simple. Se trata de la "segunda ley de Newton", que permite predecir la posición futura de cualquier objeto (desde pelotas hasta galaxias) si se conocen la posición y la velocidad en un momento dado y las fuerzas que actúan sobre él. (Pág. 143 Blatman, Ariel y Otros – Matemática 8 EGB – 2 ESB – Confluencias – Editorial Estrada Secundaria – Colonia Suiza República Oriental del Uruguay – 2009)

- "El área bajo la curva aceleración es la velocidad alcanzada" – (Pág. 324 Integral Definida - De Guzmán, M. & Colera, J. – Matemáticas I – C.O.U: Ed. Anaya- España – 1998).

- La velocidad de una partícula es la razón de cambio de desplazamiento con respecto al tiempo. Los físicos también se interesan en otras razones de cambio; por ejemplo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia). (Pág. 145 - Sección 2.6 – Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Límites y derivadas. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos – 3ª ed.- Ed. Thomson – México – 2006)

Actividad

En este taller se analizarán los contenidos de Física involucrados en algunos problemas contextualizados para ilustrar que la preocupación por la formalización matemática y el rigor científico no siempre es adecuadamente orientada, desfavoreciendo el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Consigna

Los enunciados que se incluyen son situaciones problemáticas contextualizadas, que involucran conceptos de Física, seleccionados de libros de textos de Matemática del Nivel Secundario y primer curso universitario. Para cada uno de ellos:

a) Esbozar la solución de los problemas propuestos a fin de identificar los conceptos y procedimientos matemáticos que necesitarían poner en juego sus alumnos para resolverlo.

b) Identificar los contenidos de Física involucrados y la rigurosidad científica de la formulación del enunciado.

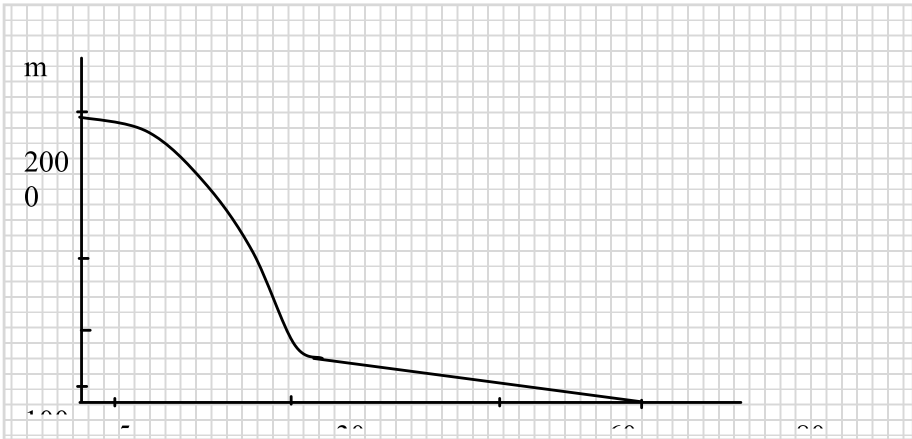
c) Analizar la validez científica de los resultados obtenidos y su posible generalización.

d) Si lo cree conveniente, reformular el enunciado.

Aclaración: Los enunciados han sido ordenados según el objeto matemático predominantemente involucrado de acuerdo de acuerdo al criterio de los respectivos autores

Ejemplos de Situaciones Problemáticas a analizar contextualmente

- Ésta es la gráfica altura-tiempo de la caída de un paracaidista.



Di cuál es la velocidad de caída libre, cuánto tiempo la mantiene y que altura cae de ese modo; cuál es su velocidad con el paracaídas abierto, cuánto tiempo la mantiene y que altura recorre así.

¿En qué instantes lleva una velocidad de 50m/s?

- Una bola de béisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64m/s. El número de metros m sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación:

$$m = -16t^2 + 64t.$$

a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 m sobre el suelo?

b) ¿Cuándo regresará al piso?

- Lanzamos una pelota, la altura alcanzada y (en m) y los metros recorridos x están relacionados por la ecuación: $y = -5x^2 + 10x$. Calcula la máxima altura alcanzada por la pelota.

Resultados esperados

- Comprender que la contextualización matemática es una estrategia didáctica y pedagógica eficiente sólo si se asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales.
- Realizar un análisis crítico de la contextualización de modelos físicos que usa el docente de matemática.
- Adquirir destreza en la contextualización matemática usando fenómenos físicos.
- Aplicar los fundamentos de la Física para orientar al alumno en el proceso de validación del modelo comparando el sistema modelo con el real a partir de los resultados obtenidos en la resolución de las situaciones problemáticas contextualizadas.

Bibliografía

- Andrés, M. E. Actividades de Matemática 8. 1a ed. Buenos Aires. Santillana, 2006.
- Batanero, Carmen; Godino; Juan &Navarro Pelayo, Virginia. Conocer y aprender matemáticas: su relación con la resolución de problemas. Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática. Granada, Octubre 2003.
- Camarena Gallardo; Patricia del Instituto Politécnico Nacional, México. La Matemática en el Contexto de las Ciencias. Actas III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Editora: Cecilia Gaita Lima, 2008.
- De Guzmán, M. & Colera, J. Matemáticas II. C.O.U: Ed. Anaya. España, 1989.

- De Katz, M. Modelización: una forma de encontrar el sentido de la Matemática. Edición impresa Ambiente & Ciencia. Edición del Miércoles 22 de abril de 2009 (C) Prensa UNL, El Litoral. Artículo disponible en línea el 15/07/09. http://www.ellitoral.com/index.php/diarios/2009/04/22/medioambiente/MED-02.html
- Font, Vicenç. Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. Texto de la conferencia inaugural del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Lima, 2008.
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros- Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manuel para el Estudiante. Proyecto Edumat-Maestros, 2003 www.ugr.es/local/godino/**edumat-maestros**/welcome.html
- Godino, J. La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática Granada, 2003
- Larson, Hostetler & Edwards. Cálculo I. Octava Edición. Mc Graw Hill. China, 2006.
- Malaspina; Uldarico. Intuición y rigor en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Actas III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Editora: Cecilia Gaita Lima. Febrero del 2008.
- Purcell, Edwin & Varberg, Dale. Cálculo con geometría analítica. Sexta Edición. Pearson.
- Serway, R. & Jewett, J. Física Para Ciencias e Ingenierías. Volumen I. 6a Ed. Thomson. México, 2005.
- Stewart, J - Cálculo. Conceptos y Contextos. 3ª ed. Thomson. México, 2006.

- Thomas, George B. Cálculo una variable. Undécima Edición. Pearson Addison Wesley. México, 2006.
- Zill, Dennis G. Cálculo con geometría analítica- Grupo Editorial Iberoamericana.